EE5 2000 Solucion - Examen final resuelto

Calculo I (Universidad de Lima)

UNIVERSIDAD DE LIMA

PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: CÁLCULO I
CICLO: 2024-2
TIEMPO: 90 minutos

UNA SOLUCIÓN DEL EXAMEN ESCRITO 5

1. (6 ptos.) La concentración $C(t)$ (en miligramos por centímetro cúbico, mg/cm^3) de un medicamento en el torrente sanguíneo, al momento en el que se le aplica a un paciente, es de $0{,}5\ \text{mg/cm}^3$. Además, t minutos más tarde la concentración disminuye a razón de

$$\frac{-0{,}02e^{0{,}01t}}{(e^{0{,}01t}+3)^2}\ \ \text{mg/cm}^3\ \text{ por minuto}$$

a) (4.5 ptos.) Utilice un método de integración adecuado y halle la función $C(t)$.

b) (1.5 ptos.) ¿Cuál es la concentración de dicho medicamento luego de dos horas de haber sido aplicado en un paciente? Presente su respuesta con dos cifras decimales.

Solución:

a) Del enunciado:

$$C'(t)=\frac{-0{,}02e^{0{,}01t}}{(e^{0{,}01t}+3)^2}\rightarrow C(t)=\int\frac{-0{,}02e^{0{,}01t}}{(e^{0{,}01t}+3)^2}\,dt$$

Usamos el método de sustitución. Sea

$$u=e^{0{,}01t}+3\rightarrow du=0{,}01e^{0{,}01t}dt$$

Luego:

$$C(t)=\int\frac{-2}{u^2}du=2\int(-u^{-2})\,du=\frac{2}{u}+K=\frac{2}{e^{0{,}01t}+3}+K$$

Además, por dato:

$$C(0)=0{,}5\ \rightarrow\ \frac{2}{e^{0{,}01(0)}+3}+K=0{,}5\ \rightarrow\ k=0$$

Por lo tanto:

$$C(t)=\frac{2}{e^{0{,}01t}+3}\ \ ,\ \ t\geq 0$$

b) Nos piden:

$$C(120)=\frac{2}{e^{0{,}01(120)}+3}\approx 0{,}32$$

Luego de dos horas (120 minutos) de haber sido aplicado el medicamento en un paciente, la concentración del medicamento es de $0{,}32\ \text{mg/cm}^3$ aproximadamente.

2. (5 ptos.) Utilizando un método de integración adecuado, halle la siguiente integral indefinida

$$\int \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) dx$$

Solución:

Utilizamos el método de integración por partes:

Sea:

$$u = \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) = \ln(x-4) - \ln(x+4) \quad \rightarrow \quad du = \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \left(\frac{8}{x^2-16}\right) dx$$

$$dv = dx \quad \rightarrow \quad v = x$$

Luego,

$$\int \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) dx = x \cdot \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) - \int x \cdot \left(\frac{8}{x^2-16}\right) dx$$

$$\int \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) dx = x \cdot \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) - 8\int \frac{x}{x^2-16} dx$$

$$\int \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) dx = x \cdot \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) - 4\int \frac{2x}{x^2-16} dx$$

Por lo tanto:

$$\int \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) dx = x \cdot \ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) - 4\ln|x^2-16| + C$$

3. (4 ptos.) Utilizando un método adecuado de integración, halle la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$$

Solución:

De acuerdo con la forma del integrando, aplicamos una sustitución trigonométrica:

Sea

$$x = 2\sec(\theta) \to dx = 2\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$$

Luego:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{(2\sec(\theta))^2-4}}{(2\sec(\theta))^2} 2\sec(\theta)\tan(\theta)\, d\theta$$

$$I = \int \frac{2\tan(\theta)}{4\sec^2(\theta)} 2\sec(\theta)\tan(\theta)\, d\theta = \int \frac{\tan^2(\theta)}{\sec(\theta)}\, d\theta = \int \frac{(\sec^2(\theta)-1)}{\sec(\theta)} d\theta$$

$$I = \int \sec(\theta)\, d\theta - \int \cos(\theta)\, d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)| - \operatorname{sen}(\theta) + C$$

Como:

$$x = 2\sec(\theta) \to \tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} \quad , \quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$

Entonces,

$$I = \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| - \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx = \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| - \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C$$

4. (5 ptos.) Usando un método adecuado de integración, halle la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{x^2 - 4x + 83}{(2x-1)(x^2+16)} dx$$

Solución:

Por el método de descomposición en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{x^2 - 4x + 83}{(2x-1)(x^2+16)} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{Bx + C}{(x^2+16)}$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 4x + 83}{(2x-1)(x^2+16)} = \frac{A(x^2+16) + (Bx+C)(2x-1)}{(2x-1)(x^2+16)}$$

Al igualar los numeradores, se tiene que:

$$11x^2 - 16x + 23 = A(x^2+16) + (Bx+C)(2x-1)$$

$$11x^2 - 16x + 23 = (A+2B)x^2 + (2C-B)x + (16A - C)$$

Así,

$$\begin{cases} A + 2B = 11 \\ 2C - B = -16 \\ 16A - C = 23 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, se obtiene que: $A = 5$, $B = -2$, $C = -3$

Luego:

$$\frac{x^2 - 4x + 83}{(2x-1)(x^2+16)} = \frac{5}{(2x-1)} + \frac{-2x-3}{(x^2+16)}$$

Así,

$$\int \frac{x^2 - 4x + 83}{(2x-1)(4x^2+64)} dx = \int \frac{5}{2x-1} dx - \int \frac{2x+3}{x^2+16} dx$$

$$\int \frac{x^2 - 4x + 83}{(2x-1)(4x^2+64)} dx = \int \frac{5}{2x-1} dx - \int \frac{2x}{(x^2+16)} dx - 3\int \frac{1}{(x^2+16)} dx$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{x^2 - 4x + 83}{(2x-1)(4x^2+64)} dx = \frac{5}{2}\ln|2x-1| - \ln|x^2+16| - 3\arctan\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

Los profesores del curso